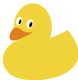
ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2023-2024

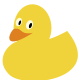
TD 10 : Produit tensoriel et représentations de groupes

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Les exercices marqués d'un 

ou d'un  sont à préparer pour le prochain TD, ils seront corrigés en début de TD.

Soit K un corps. Jusqu'à l'exercice 3 inclus, tous les espaces vectoriels sont des K-espaces vectoriels.



Exercice 1. (Produit tensoriel d'applications linéaires)

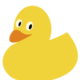
Soient E, E' et F, F' des espaces vectoriels non nuls de dimension finie. On se donne des applications linéaires $u : E \to E'$ et $v : F \to F'$.

1. Montrer que si $V \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E et $W \subset F$ est un sous-espace vectoriel de F, alors $V \otimes W$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $E \otimes F$.

2. Montrer que, via l'identification de la question 1, $\mathrm{Im}(u \otimes v) = \mathrm{Im}(u) \otimes \mathrm{Im}(v)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u \otimes v) = \mathrm{rg}(u)\,\mathrm{rg}(v)$.

3. Montrer que u et v sont surjectives (*resp.* injectives) si et seulement si $u \otimes v$ l'est.

4. Donner une formule générale pour $\ker(u \otimes v)$ en fonction de $\ker(u)$ et $\ker(v)$.



Exercice 2. (Carré symétrique et carré alterné)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On définit le carré symétrique de E comme le quotient

$$\mathrm{Sym}^2(E) := E \otimes E / \mathrm{Vect}(x \otimes y - y \otimes x)_{x,y \in E},$$

et le carré alterné de E comme le quotient

$$\Lambda^2(E) := E \otimes E / \mathrm{Vect}(x \otimes x)_{x \in E}.$$

On notera $S(E \times E)$ (*resp.* $A(E \times E)$) les formes bilinéaires symétriques (*resp.* alternées) $\phi : E \times E \to K$.

1. Montrer que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Sym}^2(E)^* \cong S(E \times E) \quad \text{et} \quad \Lambda^2(E)^* \cong A(E \times E).$$

2. Pour $x, y \in E$, on note xy (*resp.* $x \wedge y$) l'image de $x \otimes y$ dans $\mathrm{Sym}^2(E)$ (*resp.* $\Lambda^2(E)$). Donner des bases et les dimensions de $\mathrm{Sym}^2(E)$ et $\Lambda^2(E)$.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

(a) Montrer que $\Lambda^2(E) = E \otimes E / \mathrm{Vect}(x \otimes y + y \otimes x)_{x,y \in E}$.

(b) On note $\tau : E \otimes E \to E \otimes E$ l'application linéaire telle que pour tous $x, y \in E$, on a $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Montrer que l'on a une décomposition

$$E \otimes E = \ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E}) \oplus \ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E}).$$

En déduire que $\mathrm{Sym}^2(E) \cong \ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ et que $\Lambda^2(E) \cong \ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E})$.
On appelle $\ker(\tau - \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ le sous-espace des *tenseurs symétriques* et $\ker(\tau + \mathrm{Id}_{E \otimes E})$ le sous-espace des *tenseurs antisymétriques*.

4. On note $K[X_1, \dots, X_n]_2$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré 2 en les variables $X_1, \dots, X_n$. Montrer que si $\dim(E) = n$, on a un isomorphisme
$$\mathrm{Sym}^2(E^*) \cong K[X_1, \dots, X_n]_2$$
donné par un choix de base de E.

Exercice 3. (Produit tensoriel de formes quadratiques)

Soient E_1, E_2 deux K-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $q_1 \in \mathcal{Q}(E_1)$ et $q_2 \in \mathcal{Q}(E_2)$. On note ϕ_1 et ϕ_2 leurs formes polaires respectives. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\phi : (E_1 \otimes E_2)^2 \to K$ telle que pour tous x_1, $y_1 \in E_1$, x_2, $y_2 \in E_2$,
$$\phi(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \phi_1(x_1, y_1)\phi_2(x_2, y_2).$$
2. En déduire qu'il existe une unique forme quadratique $q \in \mathcal{Q}(E_1 \otimes E_2)$ telle que pour tous $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $q(x_1 \otimes x_2) = q_1(x_1)q_2(x_2)$. On notera cette forme quadratique $q_1 \otimes q_2$.
3. Soient e_1, e_2 des base de E_1 et E_2 respectivement. Exprimer la matrice de $q_1 \otimes q_2$ dans la base $e_1 \otimes e_2$ en fonctions de la matrice de q_1 dans la base e_1 et de la matrice de q_2 dans la base e_2.
4. Quel est le rang de $q_1 \otimes q_2$?
5. On suppose q_1 et q_2 non dégénérées. Quel est le discriminant de $q_1 \otimes q_2$?
6. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Exprimer la signature de $q_1 \otimes q_2$ en fonction des signatures de q_1 et de q_2.

Dans les prochains exercices, les espaces vectoriels sont sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 4. (Tordue d'une représentation par un caractère)

Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe G, et soit $\varepsilon : G \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes. On définit une nouvelle représentation de G en posant
$$\rho^\varepsilon : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ g & \longmapsto & \varepsilon(g)\rho(g). \end{array}$$
Le couple (V, ρ^ε) est appelé *la tordue par* ε de la représentation (V, ρ).

1. Vérifier que (V, ρ^ε) est bien une représentation de G.
2. Montrer que si (V, ρ) est irréductible, alors (V, ρ^ε) l'est aussi.

Exercice 5. (Représentations induite du quotient)

Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G.

1. **(a)** Montrer que toute représentation $\rho : G/H \to \mathrm{GL}(V)$ induit une représentation de $\tilde{\rho}$ de G.
   (b) Montrer que si ρ est irréductible, alors $\tilde{\rho}$ l'est aussi.
2. Réciproquement, soit $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\tilde{\rho}$ provienne d'une représentation de G/H.

Exercice 6. (Exemples de représentations du groupe symétrique)

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On s'intéresse aux représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

1. Quelle sont les représentations de degré 1 de $\mathfrak{S}_n$?
2. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ par
$$\sigma \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}.$$
Donner le morphisme $\rho : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ associé à cette représentation.
3. Montrer que l'ensemble des points fixes de cette représentation est une droite D de $\mathbb{C}^n$ (et donc une sous-représentation irréductible).
4. On note H l'orthogonal de D pour le produit hermitien canonique. Montrer que
$$H = \left\{ (x_i)_i \in \mathbb{C}^n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$
et que c'est une sous-représentation. On l'appelle la *représentation standard* de $\mathfrak{S}_n$.
5. On va montrer que la représentation standard est irréductible. On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
   - **(a)** Soit V une sous-représentation non nulle de H. Soit $x \in V \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i \neq x_j$. On pose $\tau = (i\ j) \in \mathfrak{S}_n$.
   - **(b)** En faisant agir τ sur x, montrer que $e_i - e_j$ appartient à V.
   - **(c)** En déduire que pour tous $k, \ell \in [\![1, n]\!]$, $k \neq \ell$, $e_k - e_\ell \in V$.
   - **(d)** En déduire que $V = H$ et que H est irréductible.
6. Montrer que D et H sont les seules sous-représentations irréductibles de $(\mathbb{C}^n, \rho)$.

Exercice 7. (Représentations de $\mathfrak{S}_3$)

Soit (V, ρ) une représentation complexe de $\mathfrak{S}_3$. On note τ la transposition $(1\ 2)$ et σ le 3-cycle $(1\ 2\ 3)$. On note aussi j une racine primitive $3^{\text{ième}}$ de l'unité.

1. Montrer que $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(V)$ est diagonalisable de spectre inclus dans $\{1, j, j^2\}$. On note $V_1 = \ker(\rho(\sigma) - \mathrm{Id})$, $V_j = \ker(\rho(\sigma) - j\,\mathrm{Id})$, et $V_{j^2} = \ker(\rho(\sigma) - j^2\,\mathrm{Id})$.
2. Montrer que V_1 est stable par $\rho(\tau)$, que $\rho(\tau)(V_j) \subset V_{j^2}$ et que $\rho(\tau)(V_{j^2}) \subset V_j$.
3. En déduire que V_1 et $V_j \oplus V_{j^2}$ sont deux sous-représentations de V.
4. On suppose que V est irréductible.
   - **(a)** Montrer que soit $V = V_1$, soit $V = V_j \oplus V_{j^2}$.
   - **(b)** On suppose que $V = V_1$. Montrer que $\dim(V) = 1$, puis que soit $\rho = \mathbb{1}$, soit $\rho = \varepsilon$ la signature.
   - **(c)** On suppose que $V = V_j \oplus V_{j^2}$. Montrer que $\dim(V_j) = \dim(V_{j^2}) = 1$. En déduire que si W est une autre représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ telle que $W = W_j \oplus W_{j^2}$, alors $W \cong V$ en tant que représentations.
5. Faire la liste des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 8. (Représentations d'un groupe abélien)

Soit G un groupe fini. On considère uniquement les représentations complexes de G.

1. Soit (V, ρ) une représentation de G. Montrer que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.
2. Montrer que si G est abélien, alors les représentations irréductibles de G sont de degré 1.

3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Donner toutes les représentations irréductibles de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
4. On va montrer que réciproquement si toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1, alors G est abélien.
   (a) Soit V un espace vectoriel de dimension $n = \#G$. On fixe une base $e = (e_g)_{g \in G}$ de V indexée par les éléments de G, et on fait agir G sur V de la manière suivante :
   $$\forall g, h \in G, \quad g \cdot e_h = e_{gh}.$$
   Cette représentation est appelée la *représentation régulière de G*. Montrer que cette définition définit bien une représentation de G.
   (b) Montrer que le morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ associée est injectif (i.e. que la représentation est fidèle).
   (c) On suppose que toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1. Grâce au lemme de Maschke, construire un morphisme injectif de G dans le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonales.
   (d) En déduire que G est abélien.

Exercice 9. (Contre-exemple au lemme de Maschke)

Soient p un nombre premier, et K un corps de caractéristique p (c'est-à-dire que $p \cdot 1_K = 0_K$). On fait agir $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur K^2 par
$$a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay \\ y \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette action définit bien une représentation de G de degré 2.
2. Écrire le morphisme $G \to \mathrm{GL}_2(K)$ correspondant à cette représentation.
3. Montrer que cette représentation ne peut pas se décomposer en somme directe de sous-représentations irréductibles.

Exercice 10. (Contre-exemple au lemme de Schur)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M est d'ordre 4. En déduire une représentation réelle $(\mathbb{R}^2, \rho)$ de $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Montrer que (V, ρ) est irréductible en tant que représentation réelle.
3. Montrer que $\mathrm{End}_G(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$.
4. Que se passe-t-il si on considère (V, ρ) comme une représentation complexe ?

Exercice 11. (Incursion en dimension infinie)

Soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation irréductible de G, éventuellement de dimension infinie.

1. Montrer que si G est fini alors (V, ρ) est nécessairement de dimension finie.

On suppose à partir de cette question que G est au plus dénombrable.

2. Montrer que (V, ρ) est engendré par une famille au plus dénombrable.
3. Soit $u \in \mathrm{End}_G(V)$. Montrer que pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, u est déterminé par l'image de v.
4. En déduire que $\mathrm{End}_G(V)$ est engendré par une famille au plus dénombrable.
5. On suppose que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.
   (a) Construire un morphisme injectif de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}(X) \to \mathrm{End}_G(V)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{C}(X)$ n'est pas engendré par une famille au plus dénombrable.
   (c) En déduire qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda_0\,\mathrm{Id}_V$ n'est pas inversible.
6. En déduire que $u = \lambda_0\,\mathrm{Id}_V$ puis que $\mathrm{End}_G(V) \cong \mathbb{C}$.